

Reg. No. :

Code No. : 30578 B Sub. Code : SMMA 61

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2020.

Sixth Semester

Mathematics – Core

COMPLEX ANALYSIS

(For those who joined in July 2017 onwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — ($10 \times 1 = 10$ marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. $f(z) = z^2$ எனில் $u(x, y)$ ன் மதிப்பு

(அ) $x^2 + y^2$ (ஆ) $x^2 - y^2$

(இ) $2xy$ (ஈ) $x + iy$

If $f(z) = z^2$, then the value of $u(x, y)$

(a) $x^2 + y^2$ (b) $x^2 - y^2$

(c) $2xy$ (d) $x + iy$

2. $f(z) = z \operatorname{Im} z$ எனும் சார்பு எந்த புள்ளியில் வகையிடத்தக்கது

(அ) z (ஆ) 0

(இ) அனைத்து புள்ளிகள் (ஈ) ஏதுமில்லை

$f(z) = z \operatorname{Im} z$ is differentiable at _____.

(a) z (b) 0

(c) all point (d) none

3. $f(z) = \frac{1}{z}$ மற்றும் C என்பது $|z| = r$ எனும் வட்டம் எனில்

$\int_C f(z) dz$ ன் மதிப்பு

(அ) 0 (ஆ) $2\pi i$

(இ) $-2\pi i$ (ஈ) $4\pi i$

If $\int_C f(z) dz$ where $f(z) = \frac{1}{z}$ and C is the circle $|z| = r$, then $\int_C f(z) dz =$ _____.

(a) 0 (b) $2\pi i$

(c) $-2\pi i$ (d) $4\pi i$

4. f என்பது ஒரு சாதாரண மூடிய வளைவின் அனைத்து புள்ளிகளிலும் பகுப்பு சார்பு எனில் $\int_C f(z)dz$ ன் மதிப்பு

- (அ) $2\pi i$ (ஆ) πi
(இ) 0 (ஈ) $-2\pi i$

If f a function which is analytic at all points inside and on a simple closed curve C , then $\int_C f(z)dz =$

_____.

- (a) $2\pi i$ (b) πi
(c) 0 (d) $-2\pi i$

5. $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = ?$

- (அ) e^{-z} (ஆ) e^z
(இ) $\frac{1}{z}$ (ஈ) $-\frac{1}{z}$

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = ?$$

- (a) e^{-z} (b) e^z
(c) $\frac{1}{z}$ (d) $-\frac{1}{z}$

6. $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}$ ன் துருவங்கள்

(அ) 0, 2

(ஆ) 0, 1

(இ) 0, -1

(ஈ) 0, -2

The poles of $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}$

(a) 0, 2

(b) 0, 1

(c) 0, -1

(d) 0, -2

7. $f(z) = \frac{-2i}{z^2+4z+1}$ எனில் $\text{Res}\{f(z); -2+\sqrt{3}\} = ?$

(அ) $\frac{i}{\sqrt{3}}$

(ஆ) $\frac{-i}{\sqrt{3}}$

(இ) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

(ஈ) $\frac{-2\pi}{\sqrt{3}}$

If $f(z) = \frac{-2i}{z^2+4z+1}$, then $\text{Res}\{f(z); -2+\sqrt{3}\} = ?$

(a) $\frac{i}{\sqrt{3}}$

(b) $\frac{-i}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

(d) $\frac{-2\pi}{\sqrt{3}}$

8. $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 e^z}$ ன் மதிப்பு

(அ) $2\pi i$

(ஆ) $-2\pi i$

(இ) πi

(ஈ) $-\pi i$

The value of $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 e^z}$

(a) $2\pi i$

(b) $-2\pi i$

(c) πi

(d) $-\pi i$

9. $w = \frac{1+z}{1-z}$ ன் உருமாற்றத்தின் நிலைப்புள்ளிகள்

(அ) $i, -i$

(ஆ) $0, i$

(இ) $0, -i$

(ஈ) $i, 2i$

The fixed points of the transformation $w = \frac{1+z}{1-z}$

(a) $i, -i$

(b) $0, i$

(c) $0, -i$

(d) $i, 2i$

10. ஒரே ஒரு நிலைப்புள்ளியைக் கொண்ட (ஈரோருபடி) இரட்டை ஒரு படி உருமாற்றம் என்பது

(அ) பரவளைவு (ஆ) அதிபரவளைவு

(இ) நேர்கோடு (ஈ) நீள்வட்டம்

A bilinear transformation with only one finite fixed point is called _____.

(a) parabolic (b) hyperbolic

(c) straight line (d) elliptic

PART B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions.

11. (அ) $f(z) = z^3$ எனும் சார்பின் CR சமன்பாட்டை சரிபார்க்க.

Verify CR equations for the function $f(z) = z^3$.

Or

(ஆ) ஒரு பகுதியின் மட்டு மாறிலியைக் கொண்ட பகுப்பு சார்பு மாறிலி என நிறுவுக.

Prove that an analytic function in a region with constant modulus is constant.

12. (அ) $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ என நிறுவுக.

Prove that $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

Or

(ஆ) C என்பது நேர்மறை சார்ந்த வட்டம் $|z - i| = 2$

எனில் $\int_C \frac{e^z}{z^2 + 4} dz$ ஐ மதிப்பிடுக.

Evaluate $\int_C \frac{e^z}{z^2 + 4} dz$ where C is positively oriented circle $|z - i| = 2$.

13. (அ) $z = 1$ ஐ பொருத்து, $f(z) = \frac{1}{z}$ என்பதின் டெய்லர் தொடர் விரிவாக்கத்தினைக் காண்க.

Find the Taylor's series expansion for $f(z) = \frac{1}{z}$ about $z = 1$.

Or

(ஆ) $\frac{ze^z}{(z-1)^3}$ என்பதன் எச்சத்தை அதன் துருவங்களில் காண்க.

Find the residue of $\frac{ze^z}{(z-1)^3}$ at its pole.

14. (அ) C என்பது $|z| = 2$ எனில் $\int_C \frac{dz}{2z+3}$ ஐ மதிப்பிடுக.

Evaluate $\int_C \frac{dz}{2z+3}$ where C is $|z| = 2$.

Or

(ஆ) மதிப்பிடுக $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\sin\theta}$.

Evaluate $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\sin\theta}$.

15. (அ) $z_1 = 2, z_2 = i, z_3 = -2$ என்ற புள்ளிகளின் $w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$ என்பன முறையே ஈற்றொருபடி உருமாற்றம் காண்க.

Find the bilinear transformation which maps the points $z_1 = 2, z_2 = i, z_3 = -2$, onto $w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$ respectively.

Or

(ஆ) $w = \frac{1}{z-2i}$ என்பதன் நிலைப்புள்ளியைக் காண்க.

Find the fixed points of $w = \frac{1}{z-2i}$.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions.

16. (அ) $r > 0$ மற்றும் $0 < \theta < 2\pi$ எனில்

$$f(z) = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \text{ என்பது}$$

வகையிடத்தக்கது என நிறுவுக. மேலும் $f'(z)$ ஐ காண்க.

Show that $f(z) = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$ where $r > 0$ and $0 < \theta < 2\pi$ is differentiable and find $f'(z)$.

Or

(ஆ) $f(z)$ என்பது பகுப்பு சார்பு எனில்

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2 \text{ என நிறுவுக.}$$

If $f(z)$ is analytic. Prove that

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2.$$

17. (அ) காஷியின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Cauchy's theorem.

Or

- (ஆ) மொரேராவின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Morera's theorem.

18. (அ) லாரண்ட் -ன் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Laurent's theorem.

Or

- (ஆ) காஷியின் எச்சத் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Cauchy's residue theorem.

19. (அ) மதிப்பிடுக $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13 + 5\sin \theta}$.

Evaluate $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13 + 5\sin \theta}$.

Or

- (ஆ) நிறுவுக $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1 + n^2} dx = \frac{\pi}{2e}$.

Prove that $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1 + n^2} dx = \frac{\pi}{2e}$.

20. (அ) பின்வருவன பொது வடிவ கோப்புகள் எனில் அதன் புள்ளிகளைக் காண்க. மேலும் அவதிப் புள்ளிகள் இருப்பின் அதனையும் காண்க.

(i) $w = z + \frac{1}{z}$

(ii) $w = e^z$.

Find the points where the following mappings are conformal. Also find the critical points of any.

(i) $w = z + \frac{1}{z}$

(ii) $w = e^z$.

Or

- (ஆ) எந்த ஒரு ஈறொருபடி உருமாற்றமும் குறுக்கு விகிதத்தைக் கொடுக்கும் என நிறுவுக.

Prove that any bilinear transformation preserves cross ratio.
